



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# Wytrzymałość materiałów

## EiP - Wykład Nr 4

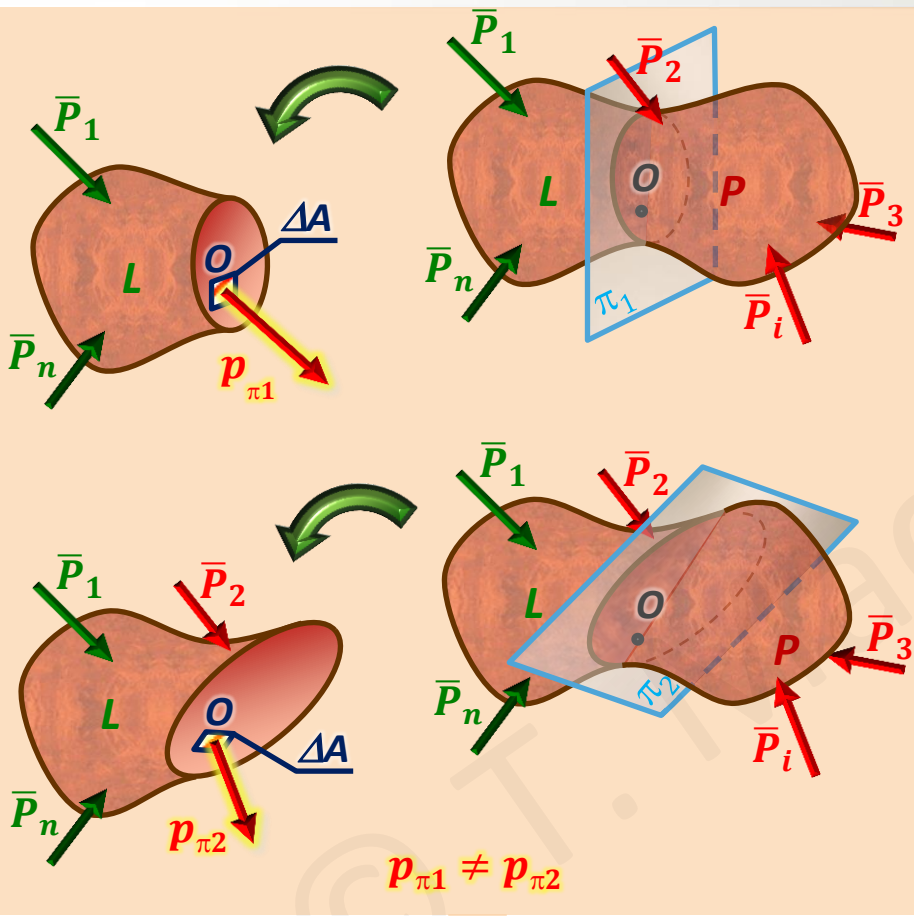
### Analiza stanu naprężenia

Stan naprężenia w punkcie, tensor naprężenia, klasyfikacja stanów naprężenia, analiza jednoosiowego stanu naprężenia, analiza płaskiego stanu naprężenia, koło naprężeń Mohra.

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki  
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

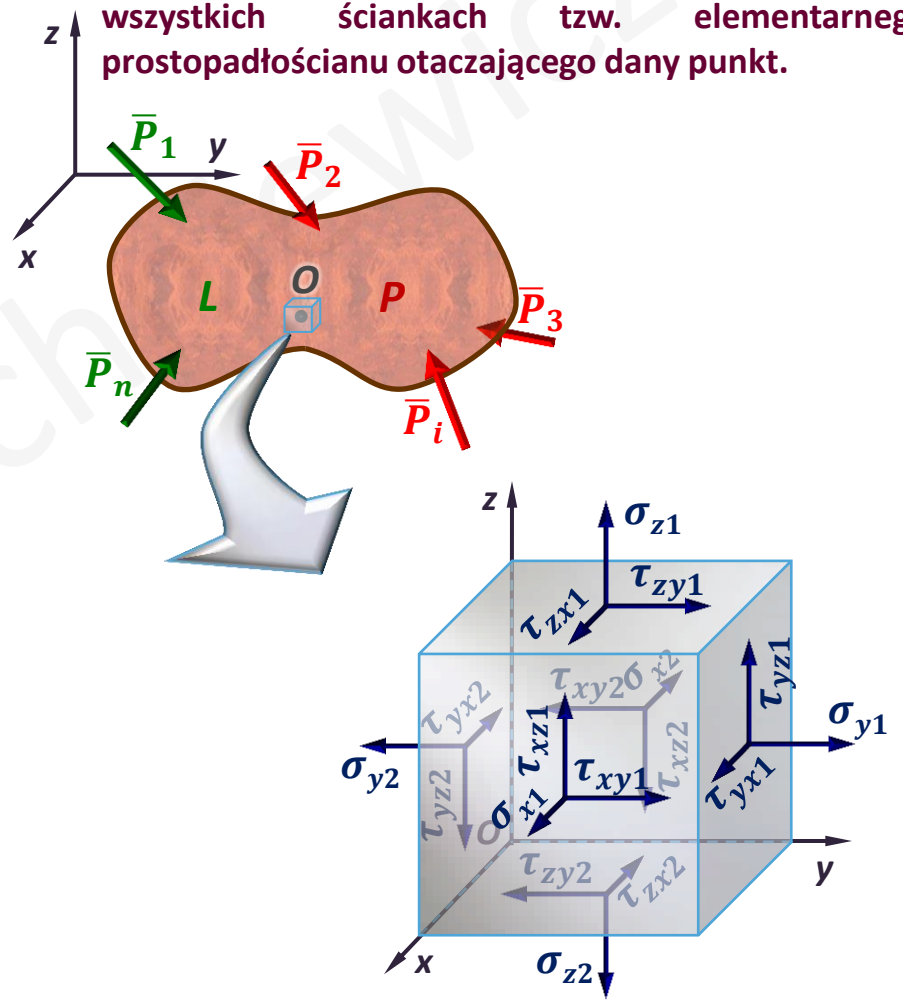
**Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz**

# 4.1. Stan naprężenia w punkcie



1. Naprężenie w danym punkcie na powierzchni myślowego przekroju zależy od orientacji tego przekroju.

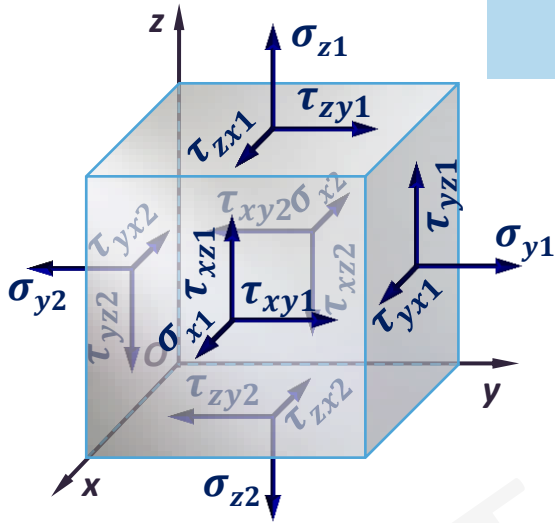
2. Jednoznaczny opis stanu naprężenia w punkcie wymaga w związku z tym określenia naprężeń na wszystkich ściankach tzw. elementarnego prostopadłościanu otaczającego dany punkt.



18 składowych stanu naprężenia

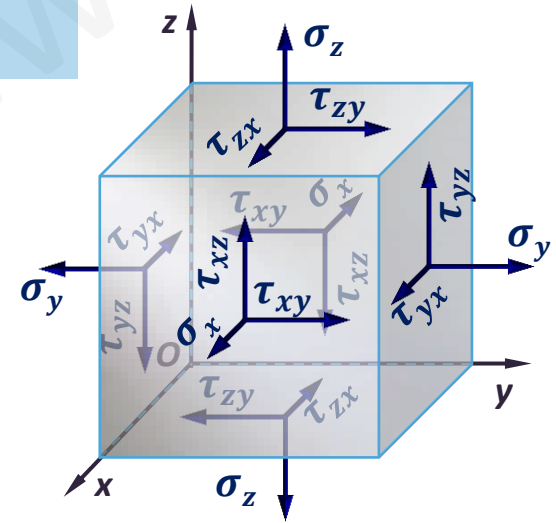
## 4.1. Stan naprężenia w punkcie

- 1) Założenie:  
Brak sił masowych (sił ciężkości i bezwładności).
- 2) Warunki równowagi:  
 $\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$



18 składowych stanu naprężenia

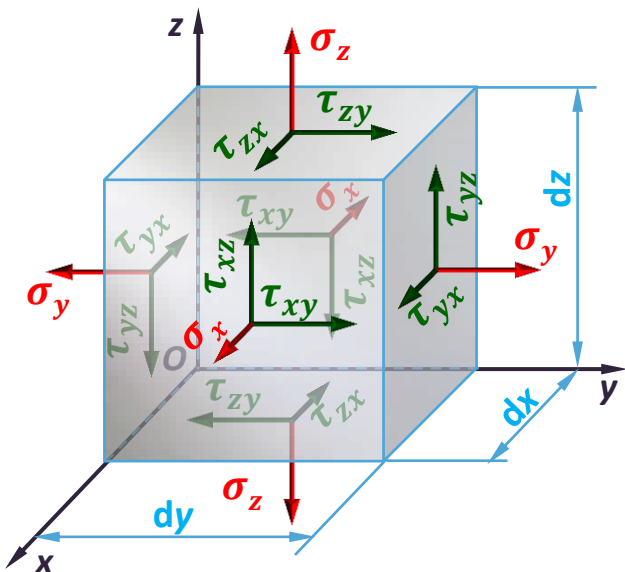
$$\sigma_{i1} = \sigma_{i2} \text{ oraz } \tau_{ij1} = \tau_{ij2}$$



9 składowych stanu naprężenia:

- 3 naprężenia normalne:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- 6 naprężeń stycznych:  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zy}$

## 4.1. Stan naprężenia w punkcie



$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \Rightarrow (\tau_{yz} dx dz) dy - (\tau_{zy} dx dy) dz = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \Rightarrow (\tau_{zx} dx dy) dz - (\tau_{xz} dy dz) dx = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \Rightarrow (\tau_{xy} dy dz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

**Prawo równości naprężeń stycznych w płaszczyznach prostopadłych:**

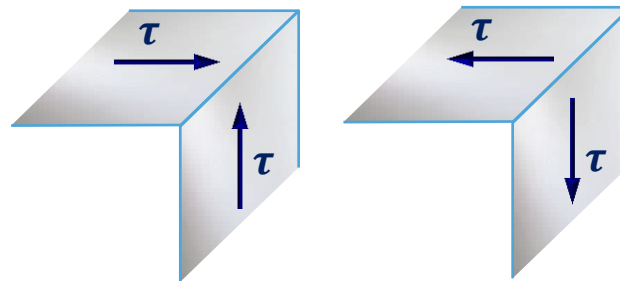
Naprężenia styczne w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych, prostopadłe do krawędzi przecięcia się tych płaszczyzn, są sobie równe i skierowane do lub od krawędzi.

9 składowych stanu naprężenia:

- 3 naprężenia normalne:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- 6 naprężeń stycznych:  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}$

**Tensor stanu naprężenia:**

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

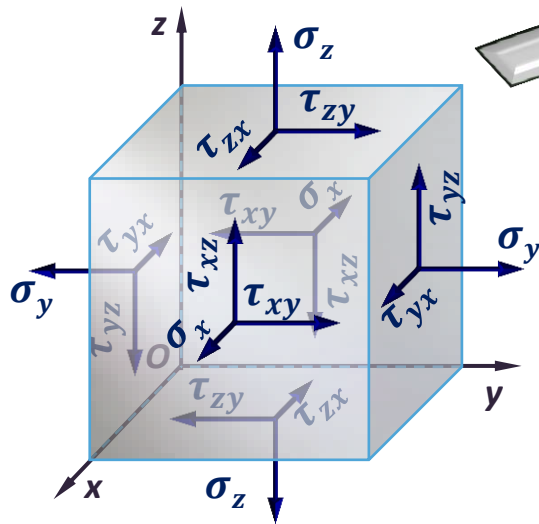


**Ostatecznie:**

Stan naprężenia w punkcie opisać można przy użyciu sześciu niezależnych składowych stanu naprężenia:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} (= \tau_{yx}), \tau_{xz} (= \tau_{zx}), \tau_{yz} (= \tau_{zy})$

## 4.2. Klasyfikacja stanów naprężenia:

### 4.2.1. Dowolny przestrzenny stan naprężenia:

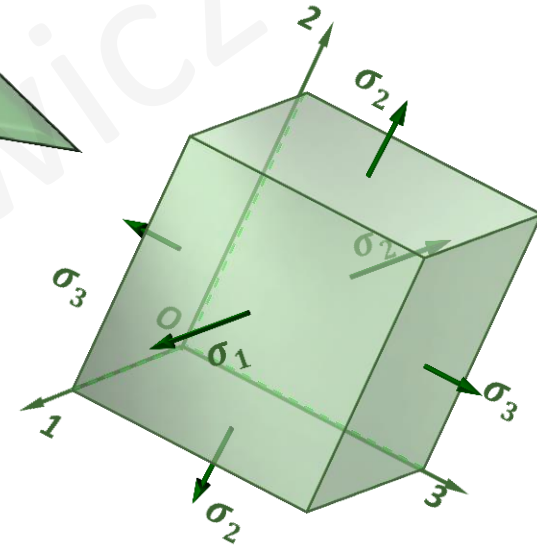


W każdym punkcie ciała można tak zorientować trzy osie prostokątnego układu współrzędnych, że na płaszczyznach prostopadłych do tych osi nie wystąpią naprężenia styczne.

Osie te nazywamy **kierunkami głównymi** i oznaczamy liczbami 1, 2, 3.

Płaszczyzny prostopadłe do kierunków głównych noszą nazwę **płaszczyzn głównych**, zaś naprężenia normalne w nich działające – **naprężen głównych**:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

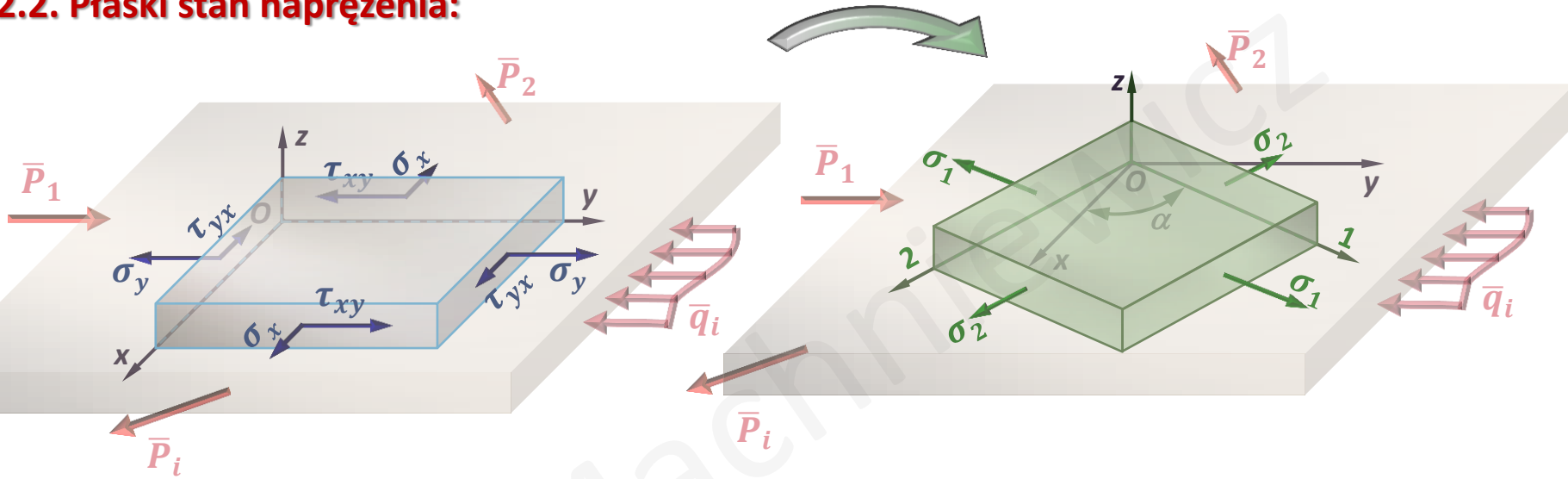
Tensor  
dowolnego  
przestrzennego  
stanu naprężenia

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Tensor  
przestrzennego stanu  
naprężenia określonego  
kierunkami głównymi

## 4.2. Klasyfikacja stanów naprężenia:

### 4.2.2. Płaski stan naprężenia:



Tensor płaskiego  
(dwuosiowego)  
stanu naprężenia

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Tensor płaskiego stanu  
naprężenia określonego  
kierunkami głównymi

Płaski (dwuosiowy) stan naprężenia można opisać przy użyciu:

trzech niezależnych składowych  
tensora naprężenia:

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} (= \tau_{yx})$$

dwóch wartości

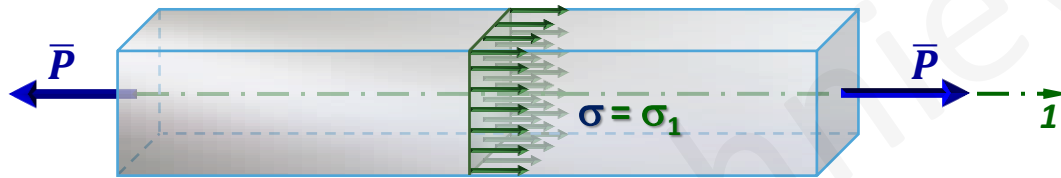
naprężeń głównych:  $\sigma_1, \sigma_2$

(i ewentualnie kąta  $\alpha$  określającego ich kierunek)

## 4.2. Klasyfikacja stanów naprężenia:

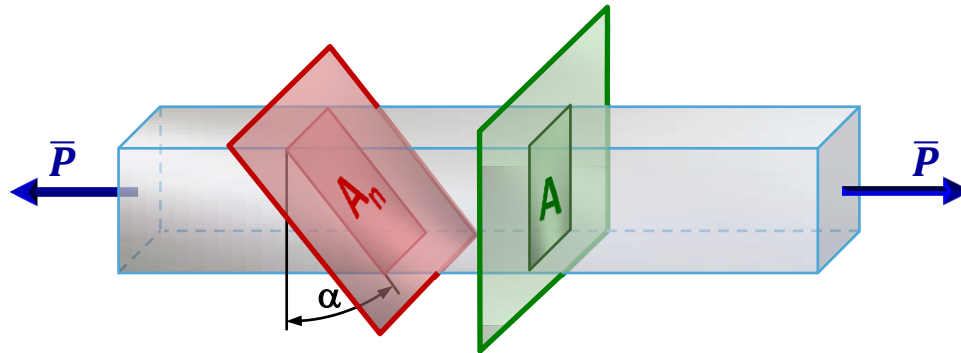
### 4.2.3. Jednoosiowy stan naprężenia:

Stan naprężenia reprezentowany jest tylko przez jedno niezerowe naprężenie główne:  $\sigma = \sigma_1$   
 np. rozciąganie, ściskanie, czyste zginanie

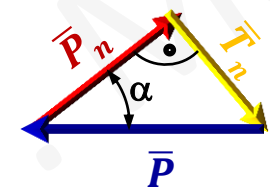
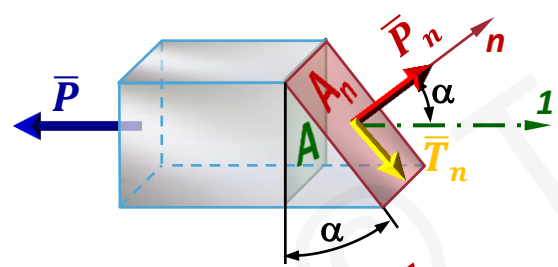




### 4.3. Analiza jednoosiowego stanu naprężenia



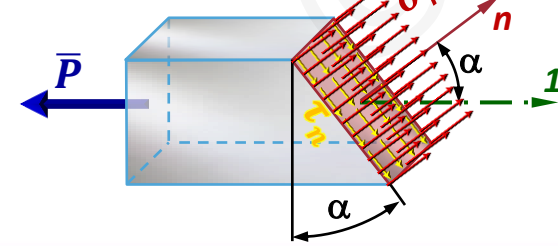
$$\sigma = \sigma_1 = \frac{P}{A}$$



$$P_n = P \cdot \cos \alpha \quad A_n = \frac{A}{\cos \alpha}$$

$$T_n = P \cdot \sin \alpha$$

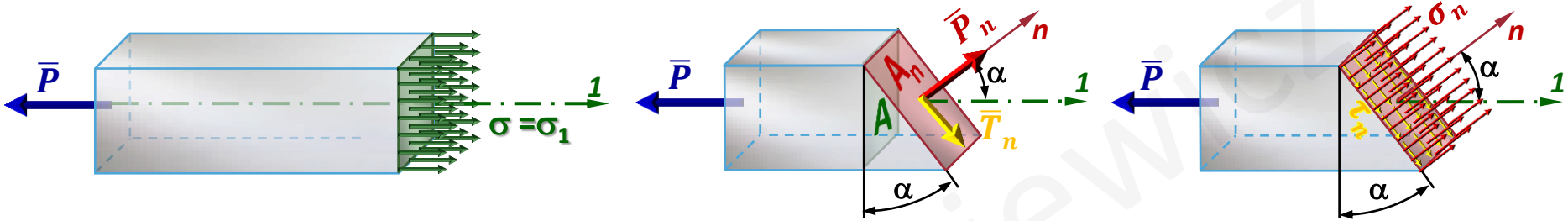
$$\sigma_n = \frac{P_n}{A_n} = \frac{P \cdot \cos^2 \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$



$$\tau_n = \frac{T_n}{A_n} = \frac{P}{A} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha)$$



### 4.3. Analiza jednoosiowego stanu naprężenia



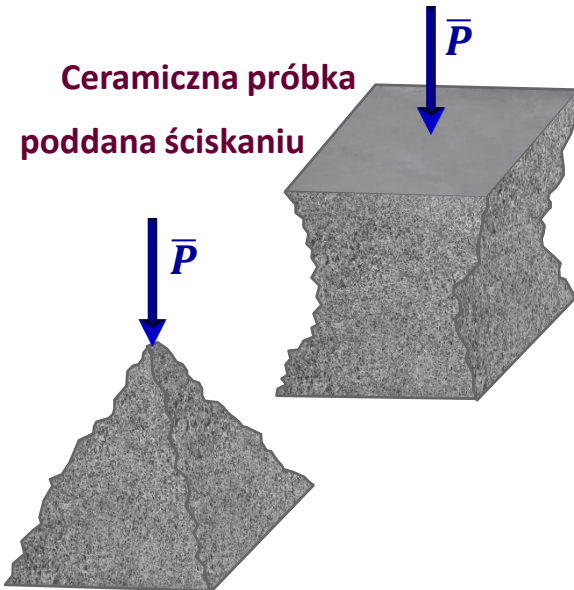
$$\sigma_n = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \quad \tau_n = \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha)$$

$$\text{Dla } \alpha = 45^\circ \quad \tau_n = \tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$$

Płaszczyzny poślizgu o kącie  $\alpha = 45^\circ$



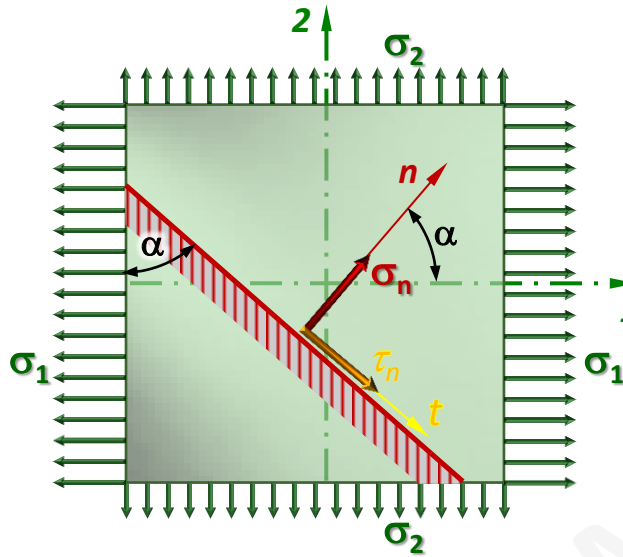
Linie Lüdersa



Ceramiczna próbka  
poddana ścisnaniu

## 4.4. Analiza płaskiego stanu naprężenia

### 4.4.1. Wyznaczanie naprężeń w kierunkach dowolnych



$$\sum_i P_{in} = 0 \Rightarrow -\sigma_1 A_1 \cos \alpha - \sigma_2 A_2 \sin \alpha + \sigma_n A = 0$$

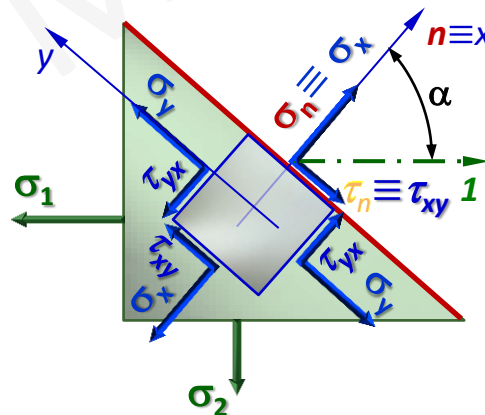
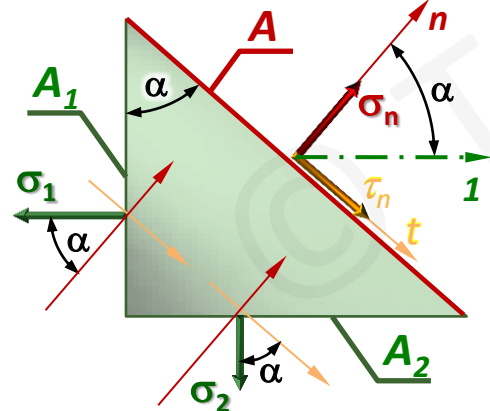
$$\sum_i P_{it} = 0 \Rightarrow -\sigma_1 A_1 \sin \alpha + \sigma_2 A_2 \cos \alpha + \tau_n A = 0$$

$$A_1 = A \cos \alpha; \quad A_2 = A \sin \alpha;$$

$$\sum P_n = -\sigma_1 A \cos^2 \alpha - \sigma_2 A \sin^2 \alpha + \sigma_n A = 0$$

$$\sum P_t = -\sigma_1 A \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_2 A \sin \alpha \cos \alpha + \tau_n A = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad \tau_n = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha$$



**Uwzględniając:**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

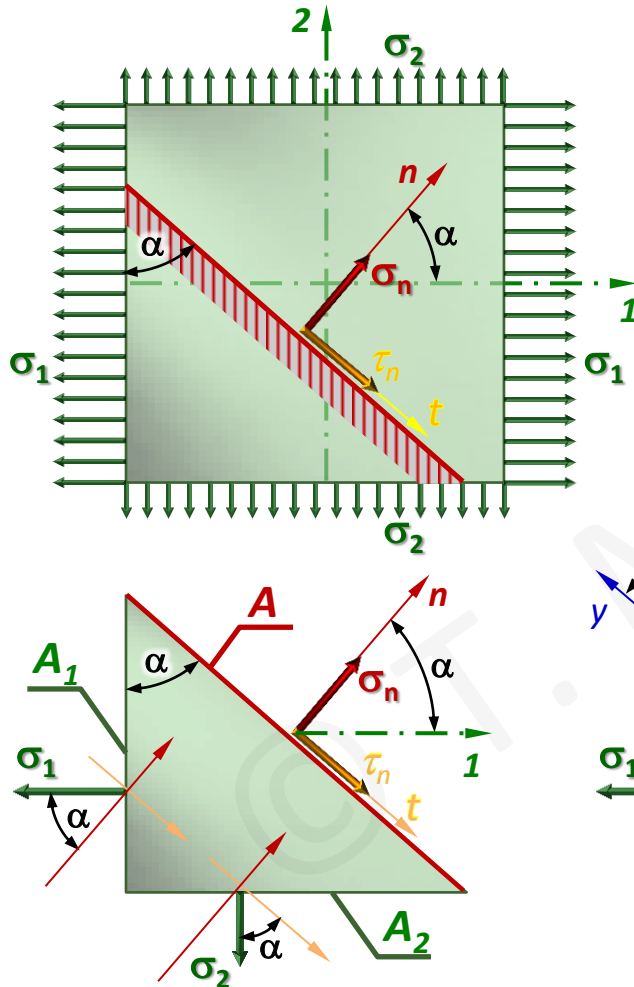
**Otrzymujemy:**

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_x$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_{xy}$$

## 4.4. Analiza płaskiego stanu naprężenia

### 4.4.1. Wyznaczanie naprężeń w kierunkach dowolnych

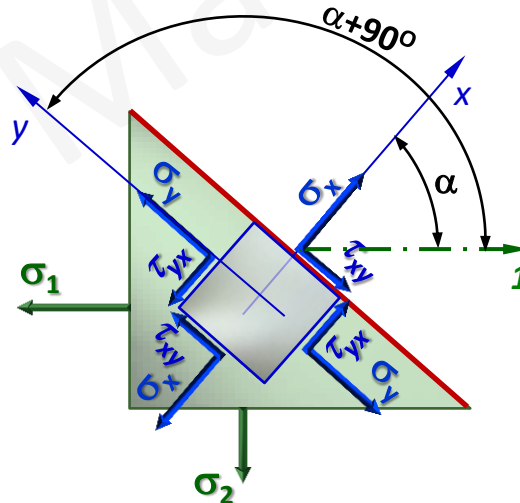


$$\sigma_x = \sigma_{(\alpha)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = \tau_{(\alpha)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad \text{dla } \alpha = 45^\circ \quad \tau_{xy} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_y = \sigma_{(\alpha+90^\circ)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(180^\circ + 2\alpha)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{(\alpha+90^\circ)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(180^\circ + 2\alpha) = -\tau_{xy}$$



Ostatecznie:

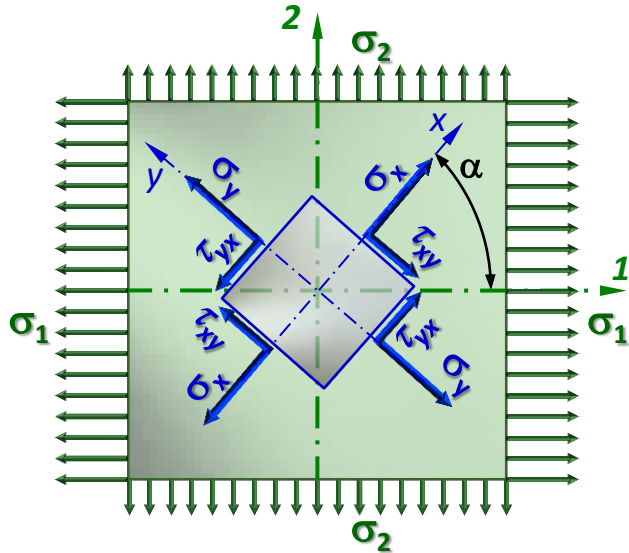
$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

## 4.4. Analiza płaskiego stanu naprężenia

### 4.4.1. Wyznaczanie naprężeń w kierunkach dowolnych



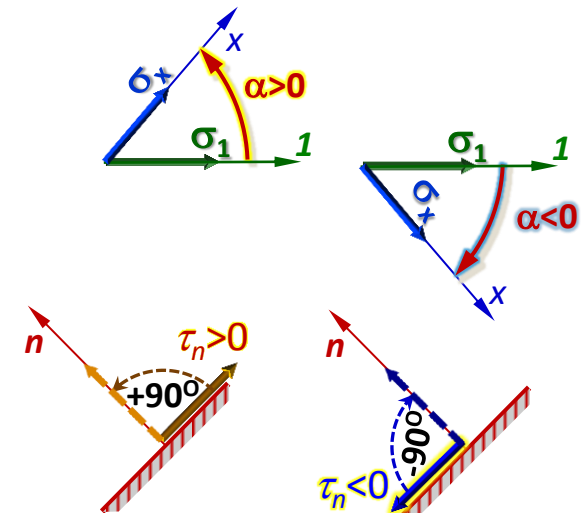
$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

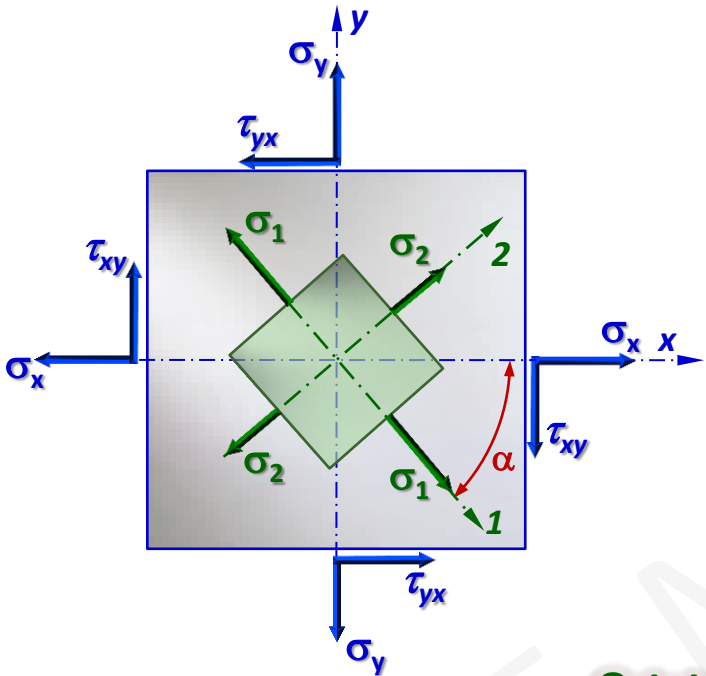
#### Umowy dotyczące znaków:

- **Kąt  $\alpha$**  uznajemy za dodatni gdy odmierzony jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, odkształconym ciele.
- **Naprężenia styczne  $\tau$**  uznajemy za dodatnie gdy odwrócone o  $90^\circ$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara pokrywają się z normalną do rozważanego przekroju.



## 4.4. Analiza płaskiego stanu naprężenia

### 4.4.2. Wyznaczanie naprężeń w kierunkach głównych



$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \sigma_x - \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\cos 2\alpha}$$

$$(3) \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{2\tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}; \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{tg}^2 2\alpha\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Ostatecznie:

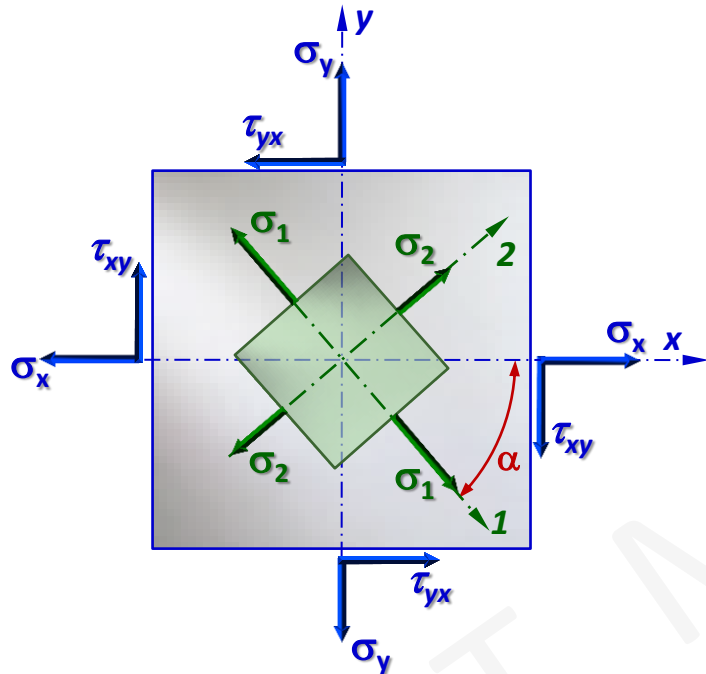
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{- uwzględniając umowę dotyczącą znaków}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

## 4.4. Analiza płaskiego stanu naprężenia

### 4.4.2. Wyznaczanie naprężeń w kierunkach głównych



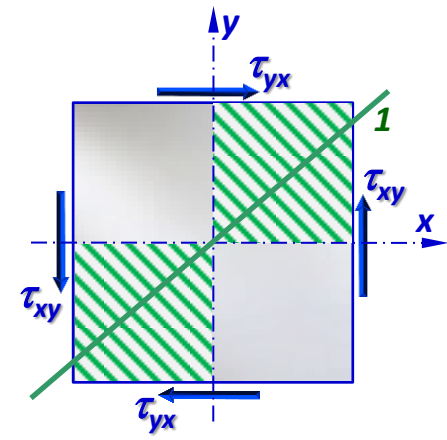
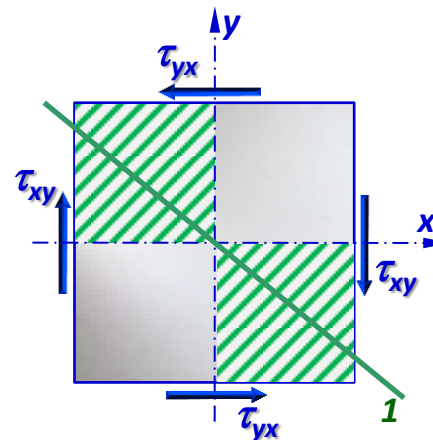
Ostatecznie:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

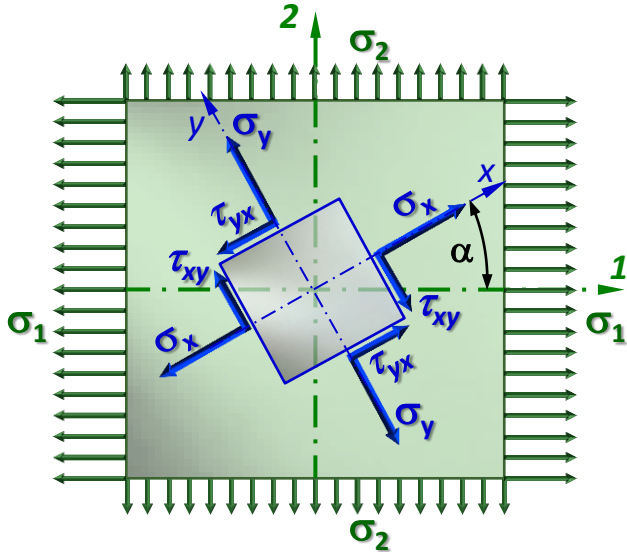
Kierunek naprężeń głównych  $\sigma_1$  przechodzi przez te ćwiartki układu współrzędnych x-y gdzie naprężenia styczne skierowane są do siebie.





## 4.4. Analiza płaskiego stanu naprężenia

### 4.4.3. Koło Mohra: a) wyznaczanie naprężeń w kierunkach dowolnych



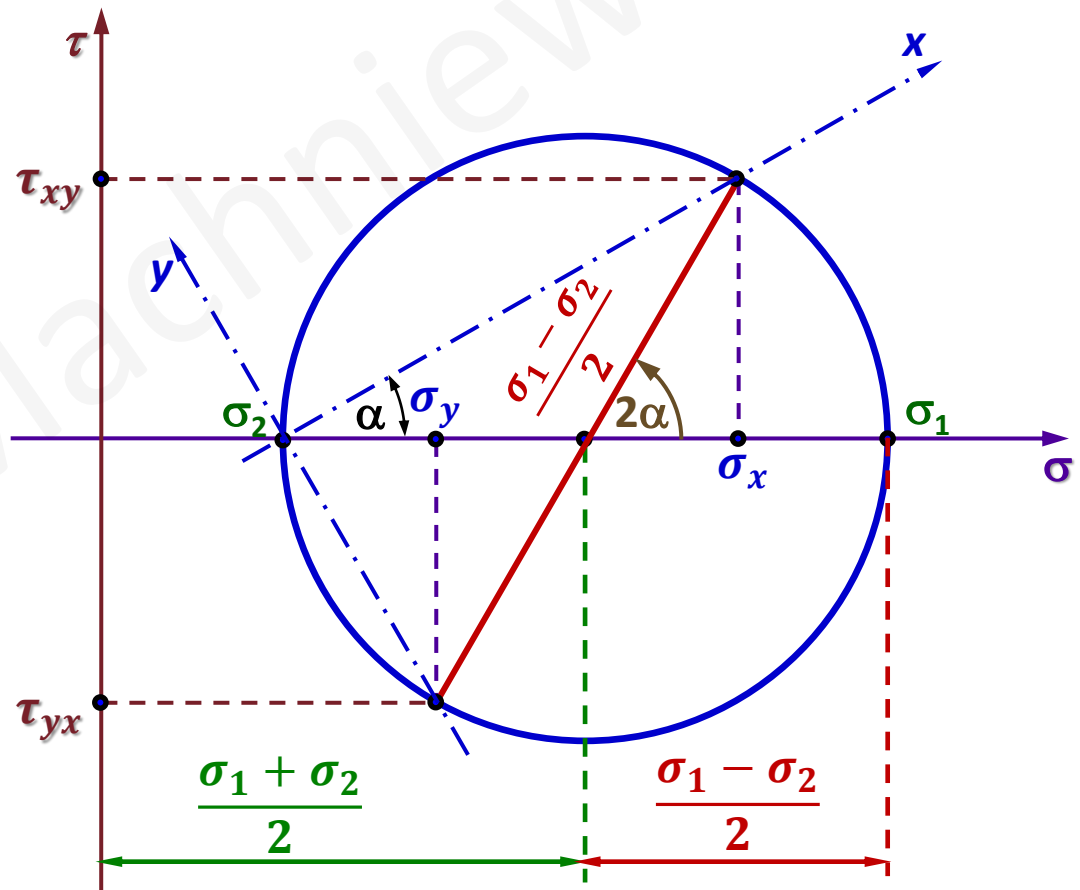
$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

Dane:  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha$

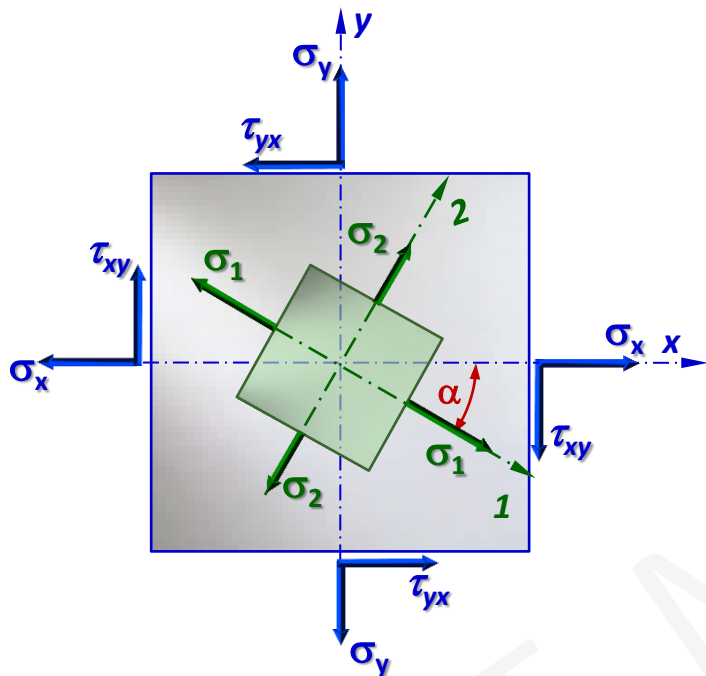
Szukane:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$





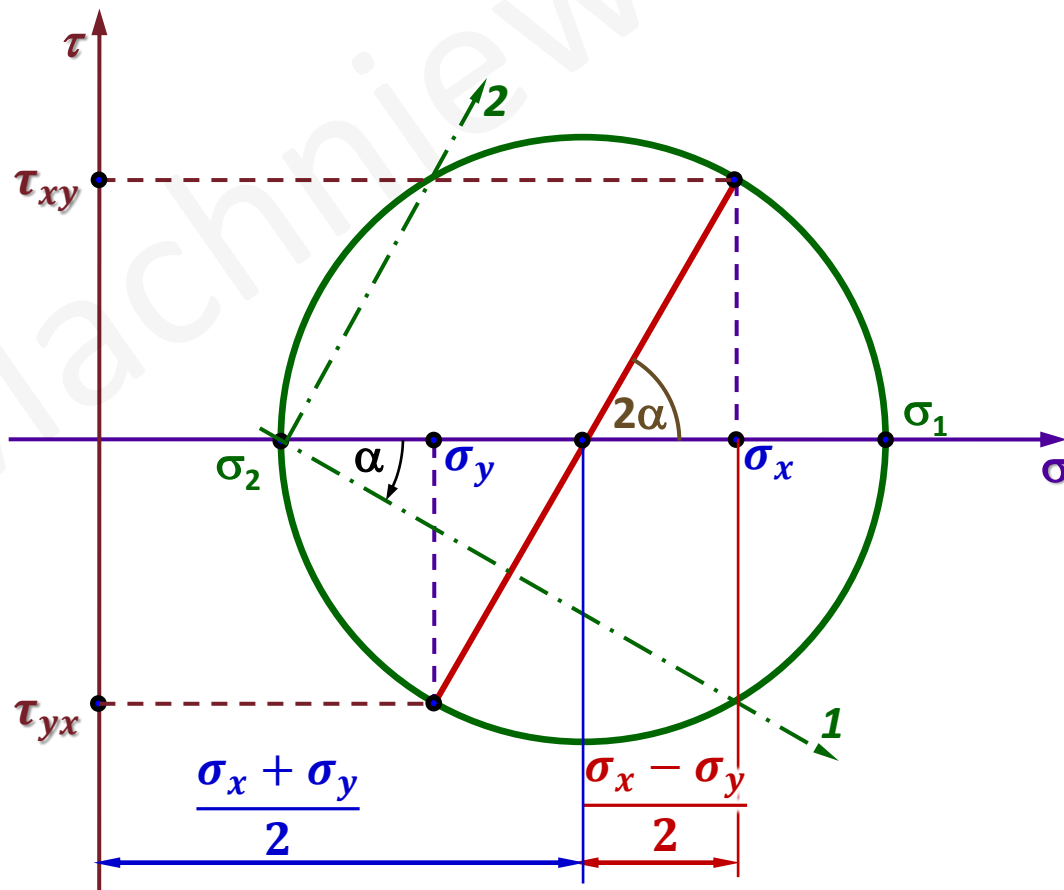
## 4.4. Analiza płaskiego stanu naprężenia

### 4.4.3. Koło Mohra: b) wyznaczanie naprężeń głównych



Dane:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Szukane:  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha$



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$